BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2005*

HİDRODİNAMİKA TƏNLİKLƏRİNİN MAKSİMAL İNVARİANTLIQ QRUPUNUN TƏYİNİ

Ə.Q.AĞAMALIYEV, M.R.BAXŞİYEVA
Bakı Dövlət Universiteti

Üçölçülü hidrodinamika tənliklərinin maksimal invariantlıq qrupu tapılmışdır. Göstərilmişdir ki, həmin qrup 13 parametrli kəsilməz Li qrupudur.

Riyazi fizika tənliklərinin qrup nöqteyi-nəzərindən öyrənilməsi fiziki problemlərin həllində mühüm rol oynayır. Bu növ məsələlərin qoyuluşu və həllinin əhəmiyyəti əvvəlki işlərimizdə [1] kifayət qədər izah edilmişdir. Belə məsələlərin həlli üsulu Li, Ovsyannikov və İbrahimov [2] tərəfindən verilmişdir. Bu metod invariantlıq qrupunun davamı üsulu adlanır.

Metodda göstərilir ki, s tərtibli

$$F(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u},...,\underset{s}{u})=0 \qquad (1)$$

diferensial tənliyin verilmiş qrupa nəzərən invariantlıq şərti

$$\left(\underset{s}{X}F\right)_{F=0}=0 \qquad (2)$$

şəklində ifadə olunur. Burada $\underset{s}{X}$ operatoru tənliyi invariant saxlayan

$$X=\zeta_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad (3)$$

operatorunun s-ci tərtibdən davam operatoru adlanır və aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\underset{s}{X}=X+\tilde{\zeta}_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\tilde{\zeta}_{ij}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}+...+\tilde{\zeta}_{i_1,i_2,...,i_s}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{i_1,i_2,...,i_s}^\alpha} \qquad (4)$$

s-indeksi diferensal tənliyin tərtibinə, α- indeksi tənliyə daxil olan funksiyaların sayına, $i,j,...$ indeksləri isə sərbəst dəyişənlərin sayına bərabərdir.

İndi bu metoddan istifadə edərək hidrodinamika tənliklərini tədqiq edək. Həmin tənliklər sistemi

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{\upsilon}=0\ ;\quad \frac{\partial P}{\partial t}+(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})P+\gamma P\vec{\nabla}\vec{\upsilon}=0\\&\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+(\vec{\upsilon}\vec{\nabla})\vec{\upsilon}+\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P=0\end{aligned} \qquad (5)$$

birinci tərtibdən diferensial tənliklər olduğundan $s=1$, $\alpha=1,2,3$, $i=1,2,3,4$ qiymətlər alırlar və $\underset{s}{X}$ operatoru

$$\underset{1}{X} = X + \zeta_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \tag{6}$$

şəklində olacaqlar. Burada

$$\zeta_i^{\alpha} = D_i(\eta^{\alpha}) - u_j^{\alpha} D_i(\xi^j) \tag{6*}$$

ayrı-ayrı tənliklərin invariantlıq şərtləri

$$\Big\{\eta^1\left(\upsilon_x^1 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^3\right) + \eta^3\rho_x + \eta^4\rho_y + \eta^5\rho_z + \zeta_1^1 + \zeta_2^1\upsilon^1 +$$

$$+ \zeta_3^1\upsilon^2 + \zeta_4^1\upsilon^3 + \rho\left(\zeta_2^3 + \zeta_3^4 + \zeta_4^5\right)\Big\}_{F_1=0} = 0$$

$$\Big\{\eta^2\gamma\left(\upsilon_x^1 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^3\right) + \eta^3 P_x + \eta^4 P_y + \eta^5 P_z + \zeta_1^2 + \zeta_2^3\gamma P +$$

$$+ \zeta_3^4\gamma P + \zeta_4^5\gamma P + \zeta_2^2\upsilon^1 + \zeta_3^2\upsilon^2 + \zeta_4^2\upsilon^3\Big\}_{F_2=0} = 0$$

$$\Big\{\eta^1\left(\upsilon_t^1 + \upsilon^1\upsilon_x^1 + \upsilon^2\upsilon_y^1 + \upsilon^3\upsilon_z^1\right) + \rho\left(\eta^3\upsilon_x^1 + \eta^4\upsilon_y^1 + \eta^5\upsilon_z^1\right) +$$

$$+ \zeta_2^2 + \rho\left(\upsilon^1\zeta_2^3 + \upsilon^2\zeta_3^3 + \upsilon^3\zeta_4^3 + \zeta_1^2\right)\Big\}_{F_3=0} = 0$$

şəklində yazılırlar. Dördüncü və beşinci tənliklərin invariantlıq şərti üçüncü tənliyin invariantlıq şərtindən uyğun indekslərin yerini dəyişməklə alınır.

ζ_i^{α} kəmiyyətlərinin uyğun ifadələrini hesablayıb yerinə yazdıqdan sonra alınan invariantlıq şərtləri eyniyyətlə ödənilməli olduğundan $\rho, P, \upsilon^1, \upsilon^2, \upsilon^3$ və onların uyğun törəmələrinin əmsalları sıfra bərabər olmalıdır.

Uzun hesablamalardan sonra alınır ki,

$$\xi_{tt}^2 = \xi_{xy}^2 = \xi_{xx}^2 = \xi_{zy}^2 = \xi_{xz}^2 = \xi_{yy}^2 = \xi_{yz}^2 = \xi_{zz}^2 = 0$$

$$\xi_{tt}^3 = \xi_{xt}^3 = \xi_{tz}^3 = \xi_{xx}^3 = \xi_{xy}^3 = \xi_{xz}^3 = \xi_{yy}^3 = \xi_{yz}^3 = \xi_{zz}^3 = 0$$

$$\xi_{tt}^4 = \xi_{tx}^4 = \xi_{zy}^4 = \xi_{xx}^4 = \xi_{xy}^4 = \xi_{xz}^4 = \xi_{yy}^4 = \xi_{yz}^4 = \xi_{zz}^4 = 0$$

$$2\xi_{tx}^2 - \xi_{tt}^1 = 0\ ;\ \ 2\xi_{ty}^3 - \xi_{yy}^1 = 0\ ;\ \ 2\xi_{tz}^4 - \xi_{tt}^1 = 0$$

$$\xi_u^1 = \xi_u^2 = \xi_u^3 = \xi_u^4 = 0\ ; \quad \xi_x^1 = \xi_y^1 = \xi_z^1 = 0$$

$$\eta_t^1 = \eta_x^1 = \eta_y^1 = \eta_z^1 = \eta_P^1 = \eta_{\upsilon^1}^1 = \eta_{\upsilon^2}^1 = \eta_{\upsilon^3}^1 = \eta_{\rho\rho}^1 = 0$$

$$\eta^2_t = \eta^2_x = \eta^2_y = \eta^2_z = \eta^2_\rho = \eta^2_{\upsilon^1} = \eta^2_{\upsilon^2} = \eta^2_{\upsilon^3} = \eta^2_{PP} = 0$$

$$\eta^\alpha_t = \eta^\alpha_x = \eta^\alpha_y = \eta^\alpha_z = \eta^\alpha_\rho = \eta^\alpha_P = \eta^\alpha_{\upsilon^i\upsilon^j} = 0 \quad , \quad \alpha = 3,4,5; \quad i,j = 1,2,3$$

$$\eta^1 - \rho\eta^1_P = 0 \quad , \qquad \eta^2 - P\eta^2_P = 0$$

Bundan əlavə,

$$\eta^3_{\upsilon^2} - \xi^2_y = 0 \ ; \quad \eta^3_{\upsilon^2} + \xi^2_x = 0 \ ; \quad \eta^3_{\upsilon^3} - \xi^2_z = 0 \ ; \quad \eta^3_{\upsilon^3} + \xi^4_x = 0$$

$$\eta^4_{\upsilon^1} - \xi^2_x = 0 \ ; \quad \eta^4_{\upsilon^1} + \xi^2_y = 0 \ ; \quad \eta^4_{\upsilon^3} - \xi^2_z = 0 \ ; \quad \eta^4_{\upsilon^3} + \xi^4_y = 0$$

$$\eta^5_{\upsilon^1} - \xi^4_x = 0 \ ; \quad \eta^5_{\upsilon^1} + \xi^2_z = 0 \ ; \quad \eta^5_{\upsilon^2} - \xi^4_y = 0 \ ; \quad \eta^5_{\upsilon^2} + \xi^2_z = 0$$

$$\xi^3_x + \xi^2_y = 0 \ ; \quad \xi^3_z + \xi^4_y = 0 \ ; \quad \xi^2_z + \xi^4_z = 0 \ ; \quad \xi^2_x = \xi^3_y = \xi^4_z$$

Yuxarıda yazılmış şərtləri ödəyən ξ^i və η^α - lar aşağıdakı kimi ifadə olunurlar:

$$\xi^1 = C_1 + C_8 t$$
$$\xi^2 = C_2 + C_3 t + C_{11} x + C_{12} x - C_7 y + C_6 z$$
$$\xi^3 = -C_3 + C_3 t + C_{11} y + C_{12} y + C_7 y - C_5 z$$
$$\xi^4 = C_4 + C_{10} t - C_6 x + C_5 y + C_{11} z + C_{12} z$$
$$\eta^1 = C_{13}\rho$$
$$\eta^2 = (2C_{12} + C_{13})\rho$$
$$\eta^3 = C_8 + C_{12}\upsilon^1 - C_7\upsilon^2 + C_6\upsilon^3$$
$$\eta^4 = C_9 + C_7\upsilon^1 + C_{12}\upsilon^2 - C_5\upsilon^3$$
$$\eta^5 = C_{10} - C_6\upsilon^1 + C_5\upsilon^2 + C_{12}\upsilon^3$$

η^α və ξ^i kəmiyyətlərini bu ifadələrdə yerinə yazıb C_i sabitlərindən birinin vahidə, qalanlarının isə sıfra bərabər olmaqla aşağıdakı operatorları alırıq:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \ X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \ ; \ X_3 = \frac{\partial}{\partial y} \ ; \ X_4 = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_5 = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} - \upsilon^3\frac{\partial}{\partial \upsilon^2} + \upsilon^2\frac{\partial}{\partial \upsilon^3}$$

$$X_6 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + \upsilon^3\frac{\partial}{\partial \upsilon^1} - \upsilon^1\frac{\partial}{\partial \upsilon^3}$$

$$X_7 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - \upsilon^2\frac{\partial}{\partial \upsilon^1} + \upsilon^1\frac{\partial}{\partial \upsilon^2}$$

$$X_8 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \upsilon^1}, \quad X_9 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \upsilon^2}; \quad X_{10} = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \upsilon^3};$$

$$X_{11} = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z};$$

$$X_{12} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + \upsilon^1\frac{\partial}{\partial \upsilon^1} + \upsilon^2\frac{\partial}{\partial \upsilon^2} + \upsilon^3\frac{\partial}{\partial \upsilon^3}$$

$$X_{13} = \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + P\frac{\partial}{\partial P}$$

Beləliklə, göstərdik ki, hidrodinamika tənliklərinin maksimal invariantlıq qrupu 13 parametrli kəsilməz Li qrupundan ibarətdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Ə.Q.Ağamalıyev. BDU-nun Elmi Xəbərləri: fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, №2, 2000; №3, 1998; №1, 2001; №1, 2002.
2. Н.Х.Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. 1983 г.

МАКСИМАЛЬНАЯ ГРУППА ИНВАРИАНТНОСТИ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

А.Г.АГАМАЛИЕВ, М.Р.БАХШИЕВА

АННОТАЦИЯ

Найдена максимальная группа инвариантности трехмерного уравнения гидродинамики. Показано, что эта группа является 13-параметрической непрерывной группой Ли.

THE MAXSIMAL INVARIANCE GROUP OF THE EQUATIONS OF THE HIDRODINAMICS

A.G.AGAMALIYEV, M.R.BAKHSHIYEVA

ABSTRACT

The maximal invarianse group of the equations of the hidrodinamics is found. It is shown that this group is the group with 13-parameters.